逐次推定の問題について

高　橋　　　一

§1　はじめに。　X_1, X_2…… を有限な平均 μ, 分散 σ^2 を持つ独立で同一分布にしたがう確率変数列とする時，未知の平均 μ の推定問題を考える。伝統的には与えられた標本数 n に対し標本平均 $\bar{X}_n=(X_1+\cdots+X_n)/n$ で μ を推定するのが一般的であろう。従って問題は n の大きさをいかに決定するかである。さて大数の強法則（以後 SLLN と記す）より $\bar{X}_n\to\mu(a.e)$ $n\to\infty$ が，又中心極限定理より $\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)/\sigma\to N(0,1)$ (in distribution) が成立する。（ここで $N(\mu,\sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布を意味する。以下分布関数を意味する場合，及び確率変数をあらわす場合等あるが，その意味は文脈より明らかであろう。）故に $\bar{X}_n$ と μ との〝距離〟は〝確率的〟には，ほぼ $\sigma/\sqrt{n}$ に比例する。（これはもち論，$\bar{X}_n$ の分散が σ^2/n であり，又 $\bar{X}_n$ が μ に収束する事を，ごく雑に述べたものであるが）これより n が大きければ大きい程，より精度の高い推定量が得られる。一方もしも同時にサンプリングのコストを考えれば，n の値は小さな方が良い。そこで，一個の標本のコストを1とした時，ある正定数 A に対し次の損失関数及び危険関数（リスク）

(1.1)　　$L_n=A(\bar{X}_n-\mu)^2+n$

(1.2)　　$R_n=E\{L_n\}=A\sigma^2/n+n$

に基づく，n の決定方式は合理的であろう。この様な定式化は Robbins [1959] により始めて行われたが，以後 Starr [1966], Starr and Woodroofe [1968], [1969], [1972], Woodroofe [1977], Chow and Yu [1981], Chow and Martinsek [1982], Martinsek [1983], [1984] 等により，さまざまの拡張，

精密化が行われてきた。本稿では上記理論の概要を論じたあと，最近の Martingale の理論に於ける大きな結果の一つである Burkholder, Davis and Gundy [1972] の定理の逐次分析への応用として特に Chow and Yu [1981] の研究の一部を紹介する。

§2 問題の定式化。

まず前節で定義した R_n について考えよう。R_n を n の連続微分可能な関数とみなせば，形式的に R_n を n で微分することにより，

$$\frac{d}{dn}R_n\Big|_{n=\sigma\sqrt{A}}=0$$

を得る。ここで n_0 を

$$(2.1)\qquad \sigma\sqrt{A}\leq n_0<\sigma\sqrt{A}+1$$

なる正整数とすれば，明らかに

$$(2.2)\qquad \mathrm{R}_{n_0}\leq R_n \qquad \textit{for all } n$$

が成立，そこで以後簡単のため，Aを $\sigma\sqrt{A}=n_0$ なる様にえらんでやれば

$$(2.3)\qquad R_{n_0}=2\sigma\sqrt{A}=2n_0,$$

従って，もしも σ^2 が既知ならば，リスクを最小にする標本数は n_0 であり，その時の期待損失は (2.3) で与えられ，問題は解決している。しかしながら，σ^2 が未知の時，固定標本数にもとずく，いかなる方法によってもこの問題を解くことは出来ない。Robbins [1959] は，$X_1,\cdots,X_n$ が観測された時 σ^2 を

$$V_n^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

で推定し (2.1) の類推より

$$n<V_n\sqrt{A}$$

なる限り，サンプリングを続ける方式を提唱した。即ち，停止時刻Tを，ある正整数mに対し，

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} T=T_{A,m}&=\inf\{n\geq m; n\geq V_n\sqrt{A}\}\\ &=\inf\{n\geq m; V_n^2\leq n^2/A\}\end{aligned}$$

で定義して，μ を $\bar{X}_T$ で推定する。この時のリスクは，

(2.5) $\quad R_T=E\{A(\bar{X}_T-\mu)^2+T\}$

で与えられる。ここで $\bar{X}_T=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{X}_k I_{[T=k]}$, $L_T=\sum_{k=1}^{\infty}L_k I_{[T=k]}$, I_A は集合 A の定義関数である（もち論 $P\{T<\infty\}=1$ である事は必要だが，このことは以下の議論より明らかになってくる)。

さて上の決定方式において，直観的には，$R_{n_0}\leq R_T$ は明らかであろう (σ^2 を推定する分だけ情報の損失がある)。従って，T にもとずく推定方式の性能の分析に際して，次の３つの量を考えることは自然であろう。

(A—1)	リスク効率	R_{n_0}/R_T
(A—2)	リグレット (Regret)	$R_T-R_{n_0}$
(A—3)	期待標本数	$E\{T\}$。

以下（A—1）～（A—3）についての Heuristic な議論を次節で与える。本節を終るにあたり，次節での議論に必要な確率論からの導具を定理の形で述べておくが，その前に次の事を注意しておく；$SLLN$ より，$V_n^2\to\sigma^2(a.e.)$ as $n\to\infty$ 従って，$P\{T<\infty\}=1$ は明らか，又 $A\to\infty$ とすれば $T_A\to\infty(a.e.)$ なることも自明であろう。

定理1．(Anscombe [1952])。$Y_1, Y_2\cdots\cdots$ を平均０で有限な分散 σ^2 をもつ同一分布からの独立な確率変数列，又 $t_1, t_2, \cdots$ は正整数値確率変数列で，ある正の定数列 $b_1, b_2, \cdots\nearrow\infty$ に対し，ある $c>0$ が存在して，$n\to\infty$ なる時

$$t_n/b_n \to c \text{ (in probability)}$$

を満足する。この時 $n\to\infty$ ならば

(2.6) $$(1/\sigma\sqrt{t_n})\sum_{k=1}^{t_n}Y_k \to N(0,1) \text{ (in distribution)}$$

が成立する。

次に停止時刻 T 及び (2.4) に於ける boundary crossing の際生じる〝余り″(Undershoot) の極限分布について述べるが，議論の単純化のために，$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ を仮定しておく。この仮定のもとでで，V_n が独立で同一分布にしたがう確率変数の和に書かれることをまず述べておく (Robbins [1959])。確率

変数 W_k を

$$W_k=(\sum_{i=1}^{k} X_i-kX_{k+1})/\sqrt{k(k+1)},\ k\geq 1$$

で定義すれば，簡単な代数計算より

(2.7) $\quad (n-1)V_n^2=W_1^2+W_2^2+\cdots+W_{n-1}^2$

又，$E\{W_k\}=0$，$Var\{W_k\}=\sigma^2$ そして，任意の $k\neq j$ に対し $Cov\{W_k, W_j\}=0$ が証明できる。従って，正規性の仮定より，$W_k \overset{i,i.d}{\sim} N(0,\sigma^2)$ となり（2.7）の右辺を S_{n-1} と書くことにすれば，それは独立で $\sigma^2\chi^2(1)$ にしたがう確率変数の和となっている。これよりTの定義は，

(2.4′) $\quad T=T_{A,m}=inf\{n\geq m-1\ ;\ S_n\leq n(n+1)^2/A\}$

とも書ける。ここで Undershoot Z を

(2.8) $\quad Z=T(T+1)^2/A-S_T$

で定義しよう。さて，$E\{W_1^2\}=\sigma^2, Var\{W_1^2\}=2\sigma^4$，故に $SLLN$ より $S_n/n \overset{a.e}{\to} \sigma^2$ $(n\to\infty)$，又（2.8）で $Z=0$ として $S_T\simeq\sigma^2T$ を考慮すれば

(2.9) $\quad T\sim\sigma\sqrt{A}=n_0 \quad (A\to\infty)$

を得る。より精密には

定理2. (Bhattacharya and Mallik [1973])。

(2.10) $\quad T^*=(T-n_0)/\sqrt{n_0}\ \to\ N(0,\frac{1}{2})$ (in dist.) $(A\to\infty)$。

一方，Zの漸近分布については，次の結果がある。

定理3. (Woodroofe [1977])。$A\to\infty$ なる時，ZとT^*は互いに漸近的に独立で T^* の漸近分布は $N(0,\frac{1}{2})$，又Zの漸近分布関数Hは密度関数 $h=H'$ を持つ，ここで $y>0$ なる y に対して，

(2.11) $\quad h(y)=(2/\sigma^2)P\{S_j\leq 3j\sigma^2-y, \forall j\geq i\}$

さらに，分布Hの平均は

(2.12) $\quad \nu=(\frac{3}{2})\sigma^2-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}E\{(S_n-3n\sigma^2)^+\}$

となる。ここで $X^+=max\ \{X,0\}$ で（2.12）の右辺の無限級数は数値計算可能である。

§3 Heuristics。 まず（A—1）のリスク効率から考えてみよう。R_T の定義より

$$R_T=E\{A(\bar{X}_T-\mu)^2+T\}$$
$$=E\{(\sigma^2 A/T)[\sqrt{T}(\bar{X}_T-\mu)/\sigma]^2+T\}。$$

故に，リスク効率は（$n_0=\sigma\sqrt{A}$）より

(3.1) R_T/R_{n_0}

$$=E\{(n_0/2T)[\sqrt{T}(\bar{X}_T-\mu)/\sigma]^2+T/2n_0\}。$$

さて，$SLLN$ より，$T/n_0\to\frac{1}{2}(a.e)$ as $A\to\infty$，又定理1より，$(\sqrt{T}/\sigma)(\bar{X}_T-\mu)=\sum_1^T(X_i-\mu)/\sigma\sqrt{T}\to N(0,1)$ (in distribation) as $A\to\infty$。以上より直観的には，

(3.2) R_T/R_{n_0} "$\to$" $E\{\frac{1}{2}N(0,1)^2+\frac{1}{2}\}$ as $A\to\infty$,

ここで "$\to$" は，極限と積分の順序交換が可能であれば成立する極限を示す。即ち（3.2）が可能であるための一つの十分条件は，

(a) $\{T_A/n_0,\ A>0\}$

(3.3) (b) $\{n_0/T_A,\ A>0\}$

(c) $\{[\sqrt{T}(\bar{X}_T-\mu)/\sigma]^2,\ A>0\}$

で定義される列が，それぞれ一様可積分（$u.i.$）であることである。実際 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ であれば，$m\geq 3$ なる時（3.2）が成立，従って，

(3.4) $R_T/R_{n_0}\to 1$ as $A\to\infty$

がなり立つことは Starr [1966] により証明されている。一般の分布の場合（3.3）の（$u.i.$）は Chow and Yu [1981] が証明している。これについては次節で又論じる。

次にリグレット，期待標本数について考えるが，以下簡単のため $X_i\overset{i.i.d}{\sim}N(\mu,\sigma^2)$ を仮定する。上と同様にして

(3.5) $R_T=E\{(A\sigma^2/T)[\sqrt{T}(\bar{X}_T-\mu)/\sigma]^2+T\}$。

さて，事象 $[T=n]$ は T の定義より $V_n^2=(n-1)^{-1}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2$ を通じてのみ，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ に依存，従って，$[T=n]$ と $\bar{X}_n$ とは独立，故に条件付き確

率の議論より，もしも（3.3）（b），（c）が（$u.i.$）であれば，（3.5）の右辺は $A\to\infty$ なる時漸延的に

$$(3.6)\qquad 2n_0+E\{(T-n_0)/\sqrt{T}\}^2+o(1)$$

に等しくなる。従って，もしも $\{T^{*2}, A>0\}$ が（$u.i.$）であれば，定理２より（3.6）は

$$(3.7)\qquad 2n_0+\tfrac{1}{2}+o(1),$$

となり，リグレットは$\frac{1}{2}$である。ここでも上と同様，リグレットが有界となる条件は（3.3）にみられる様に（$u.i.$）に大きく依存している。正規性の仮定下でリグレットが有界となる十分条件は Starr and Woodroofe［1969］により，又一般の場合は，Chow and Martinsek［1982］により研究されている。上記（3.7）は Woodroofe［1977］の結果である。

本節の最後に期待標本数 E$\{T\}$ を求めてみよう。このためには，Tの定義式として，（2.4）をもちいると便利である。Wald の補題より

$$(3.8)\qquad E\{S_T\}=E\{T\}\cdot E\{W_1^2\}$$

故に（2.8）より

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}\sigma^2E\{T\}&=E\{T(T+1)^2/A+Z\}\\&=E\{T^3/A\}+2\sigma^2E\{T^2/A\sigma^2\}+E\{Z\}+o(1)\end{aligned}$$

as A→∞。ここで（3.9）の両端より，σ^2n_0 を引き，T^3 を n_0^3 のまわりで Taylor 展開すれば，適当な（$u.i.$）条件下で，定理３より

$$(3.10)\qquad E\{T-n_0\}\to\nu/(2\sigma^2)-\tfrac{3}{4}\sigma^2,\ A\to\infty。$$

が成立する。ここで ν は（2.12）で与えられる。又（3.10）が成り立つ一つの十分条件は $m\geq3$ であることが Woodroofe［1977］で示されている。

§4　一様可積分性。 本節では最近の martingale の理論における大きな結果の一つである，Burkholder, Davis and Gundy の不等式の統計学への応用例として，Chow and Yu［1981］の研究の一部を紹介する。我々がもちいる結果は次の

定理4. (Burkholder, Davis and Gundy [1972])。Φ を $[0,\infty]$ で単調増加，$(0,\infty)$ で連続な関数で $\Phi(0)=0$, $\Phi(\infty)=\Phi(\infty-)$ を満足，さらにある定数 $c>0$ が存在してすべての $\lambda>0$ に対し

(4.1) $\Phi(2\lambda)\leq c\Phi(\lambda)$

が成り立つものとする。任意の $1\leq\alpha\leq2$ に対しある有限定数 $A=A_{c,\alpha}$ が存在して，すべての martingale $f=\{f_n, \boldsymbol{F}_n, n\geq1\}$ に対して

$$E\{\Phi(\sup_{n\geq1}|f_n|)\}$$

(4.2) $$\leq AE\{\Phi(\sum_{j=1}^{\infty} E\{|f_j-f_{j-1}|^{\alpha}|\boldsymbol{F}_{j-1}\}^{1/\alpha})\}+AE\{\Phi(\sup_{n=1}|f_n-f_{n-1}|)\}$$

が成り立つ。

定理4の証明はもち論 Burkholder et al. [1972] にあるが，比較的読みやすい証明は，Chow and Teicher [1978] Ch. 11. にある。Chow and Teicher にもある様，その応用例としてはやはり ($u.i.$) の証明の際に多くもちいられている様である。この時，例えば Brown の定理の証明法は標準的で，以下に述べる Chow and Yu [1981] の定理の証明法も基本的には同じである (cf. Chow and Teicher [1978], p. 398 Corollary 2)。

定理5. (Chow and Yu [1981])。$X_1, X_2\cdots\cdots$を，平均 μ，分散 σ^2 の同一分布からの独立な確率変数列，停止時刻Tは (2.4) で定義されたものとする。

(i) もしも $m=o(\sqrt{A})$ as $A\to\infty$ であれば

(4.3) $$\lim_{A\to\infty} T/\sqrt{A}=\sigma \quad (a.e)$$

(4.4) $$\lim_{A\to\infty} E\{T/\sqrt{A}\}=\sigma$$

(ii) もしも $E\{|X_1|^{2p}\}<\infty$ がある $p>1$ に対し成立，そしてある $K\geq K_k$ に対し

$$K \log A\leq m=o(\sqrt{A}) \qquad A\to\infty$$

であれば

(4.5) $$R_T/R_{n_0}=E\{(A(\bar{X}_T-\mu)^2+T)/2n_0\}\to 1$$

as $A\to\infty$。即ちリスク効率は漸近的に1である。

定理5の証明は，基本的には適当な martingale を考えることより (3.3) (a)〜(c)の一様可積分性を証明することにある。(4.4) については（比較的初等的な）Doob の定理より証明される。(4.5) の証明に対して鍵となるのが次の補題である。

補題1. $Y_1, Y_2, \cdots\cdots$ を平均 0 の独立な確率変数列で，ある $p\geq 2$ に対し $\{|T_n|^p, n\geq 1\}$ は $(u.i.)$，又 $\{M(b), b\in B\}$，$B\subset(0,\infty)$ は σ－加法族 $\boldsymbol{F}_0=\{\phi,\Omega\}$，$\boldsymbol{F}_n=\sigma\{Y_1,\cdots,Y_n\}$，$n\geq 1$ に適応する $\boldsymbol{F}_n$－停止時刻で $\{(M(b)/b)^{p/2}, b\in B\}$ は $(u.i.)$。この時

$$(4.6)\qquad \{|\sum_{1}^{M(b)} Y/\sqrt{b}\,|^p, b\in B\}\ \text{は}\ (u.i.),$$

〝**証明**〞 主要な部分のみをスケッチしよう。一様可積分は，ある意味での有界性の拡張である。その意味で $|M(b)/b|^{p/2}$ を有界とみなす事は可能，即ち任意の $b\in B$ に対し，$M^1=M(b)\wedge N$，$N=[Kb]$，$K\geq 1$ を考え，$M_n=M^1\wedge n$ を定義する。次に $(|Y_n|^p, n\geq 1)$ の $(u.i.)$ より任意の $\delta>0$ に対し，ある $K_1>0$ が存在して

$$\sup_{n\geq 1} E\{|Y_n I_{[|Y_n|\geq K_1]}-E\{Y_n I_{[Y_n|\geq K_1]}\}|^p\}<\delta$$

となる。ここで

$$W_n=Y_n I_{[|Y_n|\geq K_1]}-E\{Y_n I_{[|Y_n|\geq K_1]}\}$$

$$Z_n=Y_n-W_n$$

と書けば，$f=\{f_n=\sum_{i=1}^{M_n} W_i, n\geq 1\}$，$g=\{g_n=\sum_{i=1}^{M_n} Z_i, n\geq 1\}$ はともに martingale, ここで f に対しては $\Phi(\lambda)=\lambda^p, \alpha=2$ として定理4を適用すれば多少の計算のあと

$$(4.7)\qquad E\{|\sum_{i=1}^{M^1} W_1|^p\}\leq 2\mathrm{A}\delta E\{M^1\}^{p/2}$$

同様にして

$$(4.8)\qquad E\{|\sum_{i=1}^{M^1} Z_i|^{p+1}\}\leq 2^{p+1}AK_1^{p+1}E\{M^1\}^{(p+1)/2}。$$

以上より $\{|\sum_{i=1}^{M^1} Y_i/\sqrt{b}|^p, b\in \mathrm{B}\}$ の $(u.i.)$ が証明される。残りもやはり標準的な方法で証明される。

§5　結び　§4までの議論は，もっぱら標本平均 $\bar{X}_n$ をもちい μ の推定を行ってきたが，応用上の問題点は $\bar{X}_n$ は一般に "outlier" に対し robust ではないことである。したがって応用上有効な推定方法を考えるにあたり，標本中位数，トリム平均，又はランク統計量にもとずく推定量等を巾ひろく考える必要があろう。これらの問題は最近 Sen [1981] や Martinsek [1984] により論じられているが，これからの研究課題として興味深い問題を数多く含んでいる。

参　考　文　献

Anscombe, F. [1952], Large Sample theory of sequential estimation, Proc. Cambridge Philos. Soc 48 pp. 600–607.

Bhattacharya, P. K. and Mallik, A. [1973], Asymptotic normality of the stopping times of some sequential procedures, Ann. Statists. 1. pp. 1203–1211.

Burkholder, D. L, Davis, B. J. and Gundy, R. F. [1972], Inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 2.

Chow, Y. S. and Martinsek, A. T. [1982], Bounded regret of a sequential procedure for estimation of the mean, Ann. Statists. 10, pp. 909–914.

Chow, Y. S. and Teicher, H. [1978], Probability Theory, Springer–Verlag, New York.

Chow, Y. S. and Yu, K. F. [1981], The performance of a sequential procedure for the estimation of the mean, Ann. Statists. 9, pp. 184–189.

Martinsek, A. T. [1983], Second order approximation to the risk of a sequential procedure, Ann. Statists. 11, pp. 827–836.

——. [1984], Sequential determination of estimator as well as sample size, Ann Statists, 12, pp. 533–550.

Robbins, H. [1959], Sequential estimation of the nean of a normal population, Prb. and Statsts (Harald Cramér Volume). Almquist, Uppsala.

Sen, P. K. [1981], Sequential Nonparametrics, Wiley, Now York.

Starr, N. [1966], On the Asymptotic efficiency of a sequential procedure for estimating the mean, Ann. Math. Statists. 37, pp. 1173–1185.

Starr, N. and Woodroofe, M. [1969], Remarks on sequential point estimation: Proc. Nat. Acad Sci U. S. A. 63 pp. 285–288.

——. [1968], Remarks on a stopping time, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. U. pp. 1215 –1218.

——. [1972], Further remarks on sequential estimation: the exponential case, Ann. Malh. Statists. 43, pp. 1147–1154.

Woodroofe, M. [1977], Second order approximations for sequential point and interval estimation. Ann. Statists 5, pp. 984–995.